Bayes'sche Modelle zur Prognose des langfristigen Zinssatzes in Deutschland

W. Polasek, S. Jin, H. Kozumi [1]

In dieser Arbeit werden einige einfache Bayes'sche Modelle, die mit Hilfe des Gibbs-Samplers geschätzt werden können, vorgestellt und auf die Prognosefähigkeit hin überprüft. Da nur zwei multivariate Methoden zur Schätzung zur Verfügung standen, kann diese Arbeit nur als ein erster Beitrag und nicht als eine abschliessende Diskussion des Bayes'schen Zugangs in der Ökonometrie angesehen werden.

1 Einführung

Bayes'sche Modelle in der Ökonometrie haben einen entscheidenden praktischen Nachteil: Es gibt kaum Programmpakete zur deren Schätzung und Prognose. Im Programpaket BASEL (Jin 1994) werden seit einiger Zeit systematisch die einfachen Bayesmodelle, die mit Gibbs-sampling Methoden geschätzt werden können, zu einem ökonometrischen System zusammengestellt. Einige Modelle daraus wurden für den "Prognosewettbewerb" anlässlich des 5. Karlsruher Ökonometrie-Workshops ausgewählt.

Im folgenden unterscheiden wir zwischen univariaten und bivariaten Methoden. Die Zielvariable ist der 10-Jahreszinssatz in Deutschland vom 30. Sept. 1983 bis 30. Sept. 1994, das sind $n = 2050$ tägliche Daten, der Prognosezeitraum von $T = 262$ Tagesdaten und einer Leadtime von $\Delta t = t$ erstreckt sich vom 30.9.1983 bis 30.9.1995.

2 Univariate Modelle

Um die monatliche Saisonalität (22 Tage) zu berücksichtigen, wurde ein AR(30)-Prozess mit Straffheitskorrektur (vgl. Polasek und Jin 1994), d.h. ein AR-Prozess mit der Annahme eines random walk Prozesses geschätzt. Die marginalen Verteilungen der

[1] Universität Basel, Institut für Statistik und Ökonometrie, Holbeinstrasse 12, 4051 Basel, Schweiz

Parameter ist in Figur 1 zu sehen. Eine deutliche Saisonstruktur ist in den Schätzungen nicht zu erkennen. Die Prognoseevaluation ist in Tabelle 1 durchgeführt und der MSE= 0.457^2 liegt nahe bei der monatlichen no-change Prognose ($\hat{y}_t = y_{t-22}$). Figur 2 zeigt die Graphik der Zeitreihe und der AR(30)-Prognose.

Das AR-model mit "random-level-shifts" (RL-AR) wurde mit Laglänge 5 geschätzt, die Zeitreihe mit den Sprunghöhen y_t ist in Figur 3 wiedergegeben. In Tabelle 1 befindet sich die Prognoseevaluation. Bezogen auf den MSE liefert das RL-AR(5)-Modell gegenüber dem AR(30)-Modell keine Verbesserung. Obwohl die Analyse mehrere grössere Sprünge zeigt, so führt deren Wissen nicht zu einer Prognoseverbesserung.

Def.: Das AR-ARCH-Modell

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \ldots + \alpha_p y_{t-p} + \mathbf{z}_t' \nu_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

wo

$$\mathbf{z_t} = \begin{pmatrix} u_{t-1} \\ \vdots \\ u_{t-g} \end{pmatrix}, \quad u_t = y_t - \alpha_1 y_{t-1} - \ldots - \alpha_p y_{t-p}$$

$$y_t \sim N(0, \Sigma); \qquad \Sigma : \quad \text{diagonale Matrix}$$

3 Bivariate Modelle

Zur Frage, ob die anderen Zinssätze oder die Wechselkurse zur Prognoseverbesseung beitragen, wurde ein Transferfunktionsmodell der Ordnung 5 geschätzt (ARX(5)), wobei der 3- und 6-Monats FIBOR-Satz als Regressor (kontemporär) mitberücksichtigt wurde, sowie der DEM/USD und der DEM/JPY Wechselkurs. Wie die Prognoseevaluation in Tabelle 1 zeigt, gibt es keine Verbesserung im Vergleich zum AR(30) Modell, jedoch eine geringfügige Verbesserung im Vergleich zum AR(15) Modell.

Eine Überprüfung von ARCH-Effekten wurde ebenfalls versucht. Ein univariates AR-ARCH(1,2)-Modell und ein bivariates VAR-VARCH(1,1)-Modell bringt (erwartungsgemäss) keine Prognoseverbesserung, wie Tabelle 1 zeigt. Das bivariate Modell wurde mit dem 10-Jahres Zinsatz der USA modelliert, der einen vorlaufenden Effekt auf den deutschen 10-Jahres Zinssatz hat.

Def.: Das VAR-VARCH(P,Q)-Modell

$$y_t = \beta' \mathbf{x}_t + \Gamma_t' \mathbf{z_t} + U - t, \quad U_t \sim N(0, \Omega)$$

wo

$$\mathbf{z_t} = \begin{pmatrix} e_{t-1} \\ \vdots \\ e_{t-g} \end{pmatrix}, \quad e_t = y_t - \beta' x_t$$

$$\Gamma_t \sim N(0, \Sigma); \qquad \Sigma : \quad \text{diagonale Matrix}$$

$$\mathbf{x_t} = \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t-g} \end{pmatrix}$$

4 Zusammenfassung

Erstaunlich ist in diesem kleinen Vergleich von Prognosemodellen, dass das einfache univariate Modell wieder das beste Resultat liefert. Dieses Phänomen wurde schon öfters in der Praxis beobachtet und in der Literatur beschrieben. Die Modellierung komplexer multivariater Modelle in der Bayes'schen Ökonometrie stellt sich noch immer als eine Herausforderung an Praktiker und Theoretiker dar.

5 Appendix:

Modell formulations,
1. AR+ARX with Tighteness prior

$$y = \sim N(Xb, \sigma^2 I_n)$$
$$(b, \sigma^{-2}) \sim N\Gamma(b_*, \lambda H_*, \sigma_*^2, n_*)$$
$$\lambda^{-1} \sim \Gamma(\lambda_*, l_*)$$

2. RLAR model

$$y_t = \mu_t + x_t + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$
$$\mu_t = \mu_{t-1} + \vartheta_t \gamma_t, \qquad t = 1, \ldots, T.$$
$$x_t = \sum_{i=1}^{p} \beta_i (y_{t-1} - \mu_{t-1}) = \sum_{i=1}^{p} \beta_i z_{t-1}$$
$$y_{p+1} = \mu_{p+1} + \varepsilon_{p+1} = \mu_p + \varepsilon_{p+1}$$
$$y_t = \mu_{t-1} \vartheta_t \gamma_t + \mathbf{z}_t' \mathbf{b} + \varepsilon_t \quad \text{mit} \quad \mathbf{z_t} = \begin{pmatrix} y_{t-1} - \mu_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t-p} - \mu_{t-p} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} \sim N[\mathbf{b}_*, \mathbf{H}_*, \quad \sigma^{-2} \sim Ga[\sigma_*, \nu_*], \quad \pi \sim Ber[\pi_*], \quad \gamma_t \sim N[0, \varphi_*^2], \quad \text{i.i.d.}$$
$$\gamma \sim N[\mathbf{0}, \varphi_*^2 \mathbf{I}_T]$$

model	m.s.d.	m.s.d. correspondig information ratio	m.a.d.	m.a.d. corresponding info. ratio	bias	realised potential	percentage of correctly forecasted dir.
Use Exactly observed data as predicting data		0	0	0	0	0.001	1
Use 61 data now as predicting data of 61 days later	0.538	1	0.477	1	0.381	0	1
AR(10) Model with Original data	0.536	0.992	0.475	0.996	0.378	-0.001	0.649
AR(10) Model with first difference of original data	0.614	1.326	0.502	1.061	0.331	-0.001	0.515
AR(10) Model with r[t]-r[t-61]	0.538	1.017	0.477	1.007	0.381	0.001	0.504
ARX(5)	0.517	0.937	0.466	0.983	0.329	-0.001	0.550
AR-ARCH	0.517	0.937	0.466	0.983	0.329	-0.001	0.550
VAR-VARCH	0.517	0.937	0.466	0.983	0.329	-0.001	0.550
RL-AR(10) Model with original data	0.530	0.987	0.470	0.992	0.369	0.001	0.580
RL-AR(10) Model with first difference of original data	0.568	1.132	0.434	0.915	-0.422	-0.001	0.786
AR(5) Model with monthly data	0.455	0.739	0.422	0.874	0.276	-0.013	0.846
AR(5) Model with first difference of monthly data	0.690	1.697	0.633	1.310	0.446	0.013	0.308
nnet: (monthly data) X = y-4, y-5	0.346	0.404	0.307	0.599	0.051	0.059	0.846
nnet: (daily data) X = y-60, y-61	0.446	0.698	0.390	0.821	0.1475	0	0.714
BARX(5)	0.517	0.937	0.466	0.983	0.329	-0.001	0.550
AR-ARCH	0.512	0.920	0.457	0.963	-0.344	0.789	0.782
VAR-VARCH	0.509	0.909	0.455	0.960	-0.337	0.789	0.782

Figur 1: Predicting Series - Real daily data comparation with AR(30) model
DM-Jahreszinssatz: AR(30)-Prognose der Tagesdaten

Figur 2: Predicting Series - Real daily data comparation with AR(10) model
DM-Jahreszinssatz: AR(10)-Prognose der Monatsdaten

Figur 3: RL-AR(5)-Modell: Prognose und geschätzte Sprunghöhen

Figur 4: DM - 10 Jahreszinssatz: BARX(5)-Prognose der Tagesdaten

Figur 5: DM - 10 Jahreszinssatz: nnet(1 layer)Fit und Prognose mit einem Regressor (x_{t-60}, täglich)

Figur 6: DM - 10 Jahreszinssatz: nnet(1 layer)Fit und Prognose mit einem Regressor (x_{t-3}, täglich)

6 Literaturverzeichnis

Gelfand A.E., Dey D.K.[1992]: Bayesian model choice: Asymptotics and exact calculation, *mimeo. University of Connecticut*

Gelfand A.E., Smith H.F.M.[1990]: Sampling based approaches to calculating marginal densities. *JASA 85*, S.398-409

McCulloch R.E., Tsay R.S.[1991]: Bayesian analysis of autoregressive time series via the Gibbs sampler, *mimeo*

Polasek W.[1993]: Gibbs sampling in AR models with tightness priors, *WWZ - Discussion paper*, University of Basel

Polasek W., Jin S.[1994]: Extending the random level shife AR (RL-AR) model, *GFKL 95 Basel*